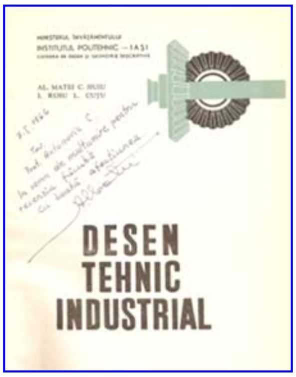
INSTRUMENTE ŞI DISPOZITIVE GEOMETRICE UTILIZATE ÎN MATEMATICĂ, DESEN TEHNIC ŞI CONSTRUCŢII (partea I)

Lorin Cantemir, prof. univ. dr., D.H.C., membru ASTR,
Universitatea Tehnică „Gh. Asachi” Iaşi (coordonator)
Ştefan Andrei, prof. gr. I., Buhuşi, jud. Bacău;
Constantin Antonovici, prof. gr. I, Piatra – Neamţ.

Rezumat. *This communication is based on Technical Drawing Book belonging to the Department of drawing and descriptive geometry of Iasi Polytechnic Institute, led by Professor Alexandru Matei, edited in 1963 and on which future engineer students used to study. At the time, as students in Mathematics Faculty in Iasi, myself and my colleague Stefan Andrei were asked to review the former calculations for the geometric forms presented in the book. 50 years later, we decided to re edit the first part of the paper to which we added new data and for the 2nd part we did only constructions with a 2 edges ruler and we got to make geometric forms one can use on their own PC, additional data which can be useful to those who study technical drawing in University or vocational schools.*

Cuvânt înainte

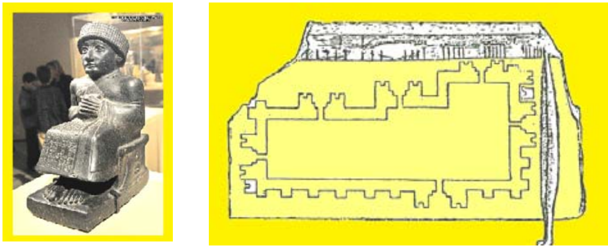
Eram studenţi la Facultatea de Matematică din Iaşi în anul al III^{-lea}, când, la un curs, profesorul nostru de Metodică – lectorul David Rimer – face următoarea propunere: care dintre studenţi se oferă să ia legătura cu profesorul Alexandru Matei, şeful catedrei de desen de la Politehnica din Iaşi, pentru a revedea şi, eventual, corecta calculele matematice ale manualului de Desen Tehnic elaborat de Catedra de Desen şi Geometrie Descriptivă pentru studenţii politehnicii. Ne-am oferit noi doi (Ştefan Andrei şi Constantin Antonovici). Profesorul Matei ne-a dat manuscrisul şi ne-a solicitat să-l verificăm din punct de vedere matematic, adică să revizuim calculele existente, să efectuăm altele noi şi să calculăm, unde era cazul, aproximaţiile la unele construcţii. A acceptat completările noastre (numite de dumnealui recenzii deşi era o contribuţie substanţială, dar eram studenţi), iar drept mulţumire ne-a oferit la amândoi câte un manual cu autograful autorului. Au trecut aproape 50 de ani şi ne-am gândit să reluăm unele secvenţe din manual şi să le reactualizăm folosind noile metode oferite de calculator.



1. Introducere

Realizarea unor instrumente geometrice (liniare sau curbe) s-a produs din cele mai vechi timpuri. Spre exemplu, o statuie din diorit (rocă magmatică foarte dură, de culoare închisă), cu dimensiunile: H = 46 cm; L = 33 cm; l =22,50 cm., care se află la muzeul Luvru din Paris, îl reprezintă pe Gudea, conducător al sumerienilor (2144 î.Hr. - 2124 î.Hr.), aşezat pe un scaun (fig.1,a), având planul cetăţii redus la scară, alături aflându-se şi rigla cu care s-au efectuat măsurătorile (fig.1,b). Din lipsa altor informaţii despre această riglă, vom emite unele ipoteze logice bazate pe gradul de dezvoltare a civilizaţiei epocii respective .

Rigla arhitectului, cum mai este cunoscută, este primul instrument de măsurare a distanţelor cadastrale (n.a.), deci considerăm că lungimea ei trebuie să fie de ordinul a doi sau trei paşi. Ştiind că mărimea unui pas este de 70 – 80 cm., înseamnă că această riglă avea o lungime de circa trei metri, relativ convenabilă pentru manevrat, măsurat şi transportat.



a. b.

Fig.1.

S-au descoperit, de asemenea, rigle confecţionate din fildeș folosite de civilizaţia din Valea Indului, în perioada anului 1500 î.Hr. Excavațiile de la Lothal au scos la lumină o astfel de riglă cu o gradație mai mică de o șaisprezecime de țol (mai puțin de 2 milimetri).

Dezvoltarea continuă a omenirii a impus, pe lângă perfecţionarea acestor instrumente, apariţia şi confecţionarea altora noi, precum şi utilizarea lor în alte scopuri decât măsurarea de lungimi sau arii. În Egipt, spre exemplu, a devenit necesară refacerea terenurilor agricole distruse de revărsarea Nilului, de unde derivă şi denumirea de Geometrie (geo = pământ, metro = măsură). Au apărut şi probleme de construcţii geometrice ale unor linii sau suprafeţe cu instrumentele existentele în acea perioadă, luând, astfel, naştere desenul tehnic. S-a descoperit că începuturile lui au existat în secolul al XV-lea, pionier fiind Leonardo da Vinci. Dovezi pentru dezvoltarea sa ulterioară au fost găsite şi în documentul german *Patentschriften* (Patente) din secolul al XIX -lea. Dar, pentru că în Anglia patentele erau acordate încă din secolul al XIII-lea, credem că desenul tehnic ar fi apărut chiar înainte de 1400.

Clasic, în acest tip de desen, figurile se efectuează la planșetă cu diverse instrumente: rigla, echerul, compasul, florarul, şablonul de litere etc.

Despre apariţia, evoluţia şi perfecţionarea unora dintre ele, precum şi despre realizarea altora, vom relata în continuare.

În această parte a lucrării ne vom referi doar la instrumentele şi dispozitivele utilizate la trasarea liniilor drepte, urmând ca în celelalte părţi să discutăm şi despre celelalte. De asemenea, vom arăta cum putem, doar cu aceste instrumente "*liniare*" să "*construim*" o geometrie formată, evident, doar din drepte, segmente şi unghiuri.

2. Prezentarea unor instrumente geometrice

2.1. Rigla

Este un instrument folosit în geometrie, desen tehnic și inginerie sau construcții pentru a măsura distanțe (de obicei scurte) și / sau pentru a trasa linii drepte.

Constă dintr-o lamelă subțire, de obicei dreptunghiulară, din lemn, metal sau plastic, uneori gradată pentru mai multă precizie.

Rigla gradată se utilizează pentru măsurarea şi transpunerea diferitelor lungimi în execuţia desenelor. Are dimensiuni de la decimetru, cu profiluri şi muchii corespunzătoare, până la rigla reductoare, care este prevăzută cu gradaţii în şase scări diferite, fiind folosită frecvent la executarea desenelor în scările indicate de proiectant.

Sunt mai multe tipuri de rigle: portabile (fig. 2, a), pliabile (metrul tâmplarului - fig. 2, b), retractabile (ruleta - fig. 2, c), panglici (de croitorie, cismărie - fig. 2, d) sau benzi de hârtie etc.

a. **b.** **c.** **d.**

Fig. 2.

În geometrie şi construcţiile geometrice rigla este un instrument abstract. Ea conservă direcţia, iar cu ajutorul ei se pot construi puncte coliniare cu două puncte date, se trasează o dreaptă, se verifică coliniaritatea şi se poate prelungi la infinit un segment de dreaptă.

În esenţă: 1) doar una dintre cele două muchii se consideră dreaptă; 2) nu este gradată; 3) lăţimea nu este importantă; 4) lungimea poate fi oricât de mare, putându-se uni oricare două puncte ale planului, indiferent cât de îndepărtate ar fi unele de altele.

2.2. Rigla cu două muchii

Este o riglă în care şi a doua muchie este o dreaptă paralelă cu prima . Tipuri: rigla clasică şcolară (fig. 3,a), **r**igla cu lupă (fig. 3,b), cu bulă (fig. 3,c) sau cu calculator (fig. 3,d) ş. a. Ca şi în cazul riglei cu o singură muchie, şi aici se consideră că ambele muchii sunt paralele şi infinite şi vom nota cu h distanţa dintre ele. Cu rigla

a. **b.** **c.** **d.**

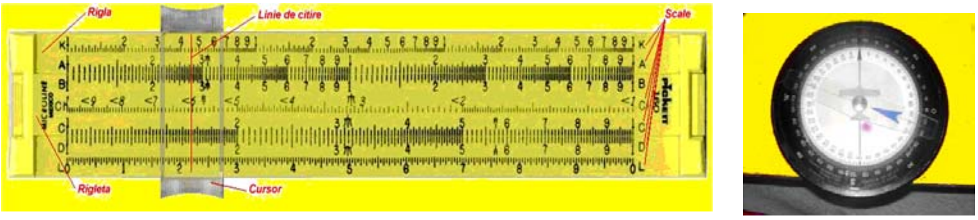
Fig. 3.

cu două muchii se pot efectua, evident, atât construcţiile realizate cu rigla cu o singură muchie, dar şi altele; le considerăm ca fundamentale pe următoarele: determinarea mijlocului unui segment, construcţia paralelei printr-un punct la o dreaptă şi a bisectoarei unui unghi. În continuare se vor exemplifica mai multe construcţii ce se pot realiza cu aceasta.

2.3. Rigla de calcul

Denumită şi **riglă logaritmică**, a fost, pentru o perioadă, cel mai utilizat instrument de către proiectanţi, ingineri şi arhitecţi pentru efectuarea rapidă şi cu o aproximare suficientă a operaţiilor matematice ca: înmulţiri, împărţiri, ridicări la putere, extrageri de rădăcini pătratice şi cubice, calculul procentelor, operaţii cu funcţii trigonometrice, calcule cu logaritmi ş.a., utile în schiţe şi desene.

Era folosită şi de profesori ca material didactic pentru aplicaţiile proprietăţilor logaritmilor, deoarece, principial, construcţia riglei de calcul se bazează pe aceste proprietăţi. Scara logaritmică, care se află la baza construcţiei, a fost inventată de Edmund Gunter în 1623. Ulterior, în 1632, William Oughtred a introdus o perfecţionare radicală, utilizând două scări identice, gradate, care alunecau una de-a lungul celeilalte, iar Seth Partridge i-a dat, în 1662, forma actuală. Este alcătuită dintr-o riglă fixă pe care se marchează două scări logaritmice, dintr-o riglă mobilă (rigletă) care culisează într-un şanţ al riglei fixe, având şi acesta două scări logaritmice, şi dintr-un cursor cu 1 - 3 fire reticulare care uşurează aprecierea fracţiunilor de diviziuni (fig. 4,a). Funcţionarea se bazează pe folosirea segmentelor proporţionale cu logaritmii



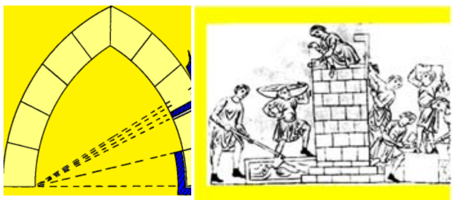
a. b.

Fig. 4.

numerelor de la 1 la 10 sau cu logaritmii unor funcţii transcendente, marcate pe scări paralele, care permit înlocuirea anumitor operaţii cu adunarea sau scăderea de segmente. Sunt mai multe tipuri, specifice domeniului de utilzare. Astfel, în fig. 4,b, este prezentată o riglă rotundă pentru aviaţie.

4. Colţarul drept sau pentru curbură

Are forma literei L şi era utilizat ca şablon pentru construcţii încă din antichitate (fig. 5,a). Apare într-o reproducere din anul 1952 după tabloul Construcţii în Anglia în 1540 (fig. 5,b).



a. **b.**

Fig. 5.

5. Teul

Se utilizează pentru executarea desenelor pe planşete sau mese simple. Se compune dintr-o lamă lată şi subţire, de lungime corespunzătoare planşetei şi dint-o placă mult mai scurtă şi mai groasă (capul teului), fixată faţă de lamă la un unghi de 90° (fig. 6, a). Unele teuri au capul format din două plăci, dintre care cea superioară

a.

b.

Fig. 6.

poate fi fixată la diferite unghiuri faţă de lamă prin intermediul unui şurub cu piuliţă (fig. 6,b). Teul permite atât trasarea paralelelor orizontale, cât şi a liniilor verticale sau înclinate la unghiuri fixe, subiect tratat în capitolul următor.

6. Echerul

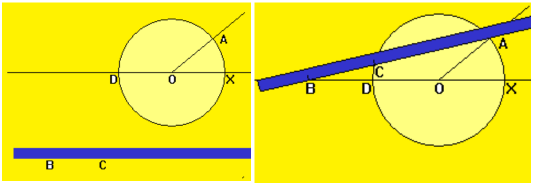
Se utilizează pentru trasarea liniilor verticale şi ale celor oblice în anumite unghiuri, cele mai utilizate fiind de 90°, 60°, 45°, 30°, care dau şi denumirea echerelor (fig. 7). Construcţia primului echer este atribuită lui Dedal, arhitect şi sculptor din mitologia greacă, menţionat pentru prima dată de Homer (secolele al IX şi al VIII–lea î.Hr.). Este cunoscut, mai ales, pentru crearea celebrului Labirint din Creta, la cererea regelui Minos, în scopul închiderii Minotaurului. Drept răzbunare pentru că a fost şi complicele reginei Pasiphae, Minos l-a închis pe arhitect și pe Icar, fiul acestuia, în acel edificiu, zidind ieșirea.

Fig. 7.

Pentru a se salva, Dedal, cu multă ingeniozitate, a confecționat două perechi de aripi artificiale, pentru el și fiul său. Reușesc să se salveze, însă Icar, avid de înălțime și mânat de ambiția nebunească de a atinge soarele, se prăbușește, murind. Considerat meșter iscusit în arta construcțiilor, sculpturii și picturii, Dedal rămâne pentru întreaga antichitate un simbol al geniului și iscusinței tehnice și artistice. În afară de echer, i se mai atribuie crearea și utilizarea altor instrumente și dispozitive ca: securea cu două tăişuri (labrys), nivela cu bulă de aer, burghiul, vela de corabie.

9. Trisectorul

Problema trisecţiei unghiului a apărut în Grecia în jurul anului 450 î. Hr. Dificultatea a constat în respectarea condiţiilor impuse de Platon, care cereau construirea unghiului a cărui mărime să fie egală cu exact o treime din mărimea unui unghi dat arbitrar, numai cu rigla negradată şi compasul. Prin anul 320 î. Hr., Pappos a declarat că, din cauza restricţiilor impuse, niciuna din problemele clasice (dublarea cubului, cuadratura cercului şi trisecţia unghiului) nu poate fi rezolvată, dar nu a făcut demonstraţii în acest sens. Poate că, şi din această cauză, mulţi au continuat să încerce să le rezolve, apelând la metodele tradiţionale. În final, abia matematicienii secolului al XIX- lea au dat soluţiile definitive de nerezolvabilitate pentru toate cele trei probleme. Imposibilitatea trisecţiunii unghiului, numai cu rigla negradată şi compasul, a fost dovedită algebric în 1837 de Pierre–Laurent Wantzel (1814 – 1848). Drept consecinţă, s-a căutat soluţionarea practică a acestei probleme, prin conceperea unor mecanisme speciale, numite trisectoare. Majoritatea lor au la bază metoda lui Arhimede privind trisectarea unghiului, care a utilizat pentru aceasta cercul şi rigla gradată, metodă considerată, probabil de atunci, ca cea mai simplă posibilă şi pe care o prezentăm în continuare.



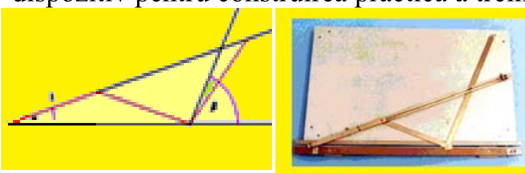
a. **b.**

Fig. 8.

Considerăm unghiul AOX şi trasăm un cerc de rază arbitrară centrat în O. Extindem semidreapta [OX în sensul opus şi notăm cu D intersecţia ei cu cercul. Marcăm raza cercului pe riglă, prin segmentul [BC] (fig. 8,a). Poziţionând rigla astfel încât să treacă prin A, iar B să fie pe linia DOX şi C pe cerc, obţinem unghiul ABD = 1 /3 din unghiul AOX (fig. 8, b).

Justificarea: din BC = OC, unghiurile CBD şi COD sunt congruente, deci unghiul OCA = 2 CBD (exterior Δ BCO); din OC = OA deducem că şi unghiurile OCA şi OAC sunt congruente şi deci OAC = 2 CBD. Rezultă că unghiul AOX = 3ABD (ca unghi exterior triunghiului ABO).

Un trisector, bazat pe ideea lui Arhimede a fost realizat de Pascal. Menţionăm că el a reuşit să trisecteze un unghi folosind altă curbă decât cercul, dar a realizat şi un dispozitiv pentru construirea practică a treimei unui unghi dat (fig. 9 a, b).



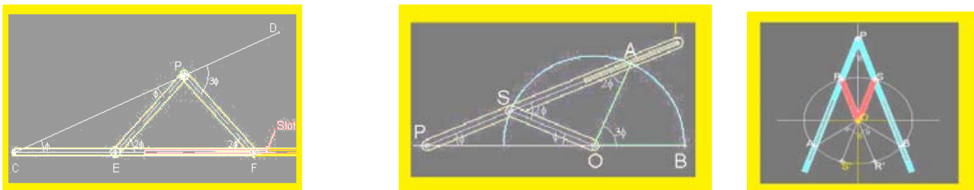
a. **b.**

Fig. 9.

Pornind tot de la această idee, Ceva – matematician italian (1647 - 1734), a realizat un dispozitiv simplu, format din trei bare articulate (fig. 10, a).

Lungimile tijelor PE şi PF sunt egale cu distanţa CE. Bara CF are o canelură, astfel încât punctul F se mişcă liber de-a lungul ei.

Comparând această figură cu metodele de înserare ale lui Arhimede, se



a. **b.** **C.**

Fig. 10.

constată uşor că unghiul PCF este totdeauna 1/3 din unghiul DPF. Un astfel de instrument, aplicabil în practică, este prezentat în figura 10,b**.** Tot cineva a conceput şi următorul dispozitiv pentru trisecţia unghiului AOB, numit pantograf (fig. 10, c). Este format din tijele PR şi PS articulate în P. Pe laturile unghiului obţinut se consideră punctele A şi B, astfel încât OA = OB =PR = RO = SO. Punctul P este un punct mobil şi se deplasează de-a lungul liniei PO. Figura PROS fiind un romb, punctele R şi S se mişcă de-a lungul unui cerc. Împărțirea în trei a unghiului AOB se realizează în cazul în care tijele PR şi PS se mişcă trecând prin punctele A şi B.

Alte variante pentru realizarea trisectoarelor:

1. Compasul lui Laisant. Propus de către M. Laisant în 1875, este compus din patru bare drepte articulate, formând împreună două romburi, (ale căror diagonale sunt bisectoarele unghiurilor determinate de laturi), devenind trisectoarele unghiului dat (fig. 11).

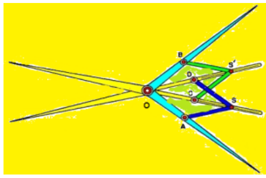


Fig. 11

Nota: Urmând acelaşi principiu, prin mărirea numărului de bare (n+1) şi, implicit, a numărului corespunzător de romburi (n-1), putem obţine împărţirea practică în **n** părţi egale a unui unghi ascuţit.

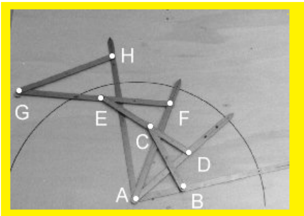


Fig. 12.

2. Trisectorul lui Kempe (1837 – 1904), desenator şi producător englez de vitralii, mobilier şi veşminte bisericeşti, este format din trei patrulatere asemenea, articulate ABCD, ADEF şi AFGH, A fiind vârful unghiului. Laturile patrulaterelor fiind proporţionale şi unghiurile respectiv congruente, semidreptele AD şi AF trisectează unghiul BAH (fig. 12)

Bibliografie

1. ***Matei Al.*** *& Co. Desen Tehnic Industrial. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.*
2. **** Dicţionar de matematici generale. Editura Enciclopedică Română, 1974.*
3. ***Lalescu T.*** *Geometria Triunghiului. Editura Apollo, Craiova, 1993.*