ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ NGN

Цуркану Д.Н., Нистирюк П.П., Баксан Л.В., Бежан Н.П., Кихай А.Г., Язловецки М.Л., Нистирюк А.П., Финчук С.И., Цуркану Т.П.
Технический Университет Молдовы,
dinu.tsurcanu@gmail.com

Abstract. *The present paper concerns the application of semi-Markov processes to analyze the operation of NGN networks (Next Generation Network).*

Ключевые-слова: *аппарат полумарковских процессов, сети связи NGN, анализ, функционирование.*

I. Введение

Как показывают результаты анализа [1], осложения в организации эксплуатации сетей связи следующего поколения NGN обусловлены в первую очередь изменением конфигурации сети и зон ответственности персонала. Сегодня неисправности на сети устраняются локально, на месте, а в распределённой сети следующего поколения это должно делаться централизованно. Пока мало опыта по организации, контролю, управлению эксплуатацией и обслуживания сетей NGN [2,3].

В этой связи чрезвычайно полезным для операторов связи будут разработки по применению полумарковских процессов, направленные на анализ функционирования сетей связи NGN.

II. Основная часть

Полумарковские процессы используются в качестве математических моделей сложных стохастических систем, к каким относятся сети связи NGN, с конечным или счетным множеством возможных состояний, переходы между которыми происходит через случайные моменты времени q, распределенные произвольным образом [4-6].

Функционирование сети связи NGN представленные в виде полумарковских систем происходит следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ сеть NGN находится в одном из возможных состояний множества $E \subset \{0,1,2,\ldots\}$, например в состоянии $i \in E$. По истечении некоторого случайного времени q_0 она переходит (мгновенно) в другое состояние $j \in E$, причем время q_0 пребывания сети NGN в состоянии i до перехода в состояние j определяется функцией распределения вероятностей $G_{ij}(t)$.

Переход сети NGN из состояния i в состояние j происходит с вероятностью, $p_{ij} \geq 0$, причем $\sum_{j \in E} p_{ij} \leq 1$ для любого $i \in E$.

Если происходит переход из состояния j в состояние k, то в состоянии j сеть NGN пребывает случайное время q_i с функцией распределения $G_{jk}(t)$ и т.д.

Таким образом, эволюцию полумарковской сети NGN можно описать двумя последовательностями: $\{h_n, n \geq 0\}$ - состояний сети NGN после n-го перехода (изменения состояния); $\{q_n, n \geq 0\}$- времен пребывания в состояниях между n- и $(n+1)-м$ переходами сети связи NGN. Для построения математической модели полумарковской сети NGN необходимо задать вероятностные характеристики двухмерного процесса $\{h_n, q_n, n \geq 0\}$.

Перейдем к определению полумарковской матрицы $Q_{ij}(t) = \{Q_{ij}, i, j \in E\}$, которая задает вероятности перехода двухмерной цепи Маркова $\{h_n, q_n, n \geq 0\}$, описывающей эволюцию полумарковской сети NGN. Такая матрица называется полумарковской, если для любых $i, j \in E$ $Q_{ij}(t) \equiv 0$, $t < 0$, где $Q_{ij}(t)$ – неубывающие непрерывные справа функции при $t \geq 0$, а $\sum_{j \in E} Q_{ij}(t) = p_i(t) \leq 1$ для любых $i \in E$ и $t \geq 0$.

Для любого фиксированного t матрица $Q(t)$ является полустохастической в том смысле, что её элементы неотрицательны, а сумма элементов в каждой строке не превышает единицы.

Определим стохастическую матрицу $P = \{p_{ij}, i, j \in E\}$ так: $p_{ij} = Q_{ij}(+\infty)$ для всех $i, j \in E$. При этом можно считать, что $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ для дюбого $i \in E$. В противном случае можно расширить множество E, добавив к нему еще один элемент l и положив $Q_{ij}(t) = 1 - \sum_{j \in E} Q_{ij}(t)$.

Для $p_{ij} = Q_{ij}(+\infty) > 0$ определим функции распределения $G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) / p_{ij}$. В случае $p_{ij} = 0$ функцию распределения $G_{ij}(t)$ можно выбирать произвольно, например $G_{ij}(t) = 1, t \geq 1$ и $G_{ij}(t) = 0, t < 1$.

Процессом марковского восстановления (ПМВ) называется двухмерная цепь Маркова $\{h_n, q_n, n \geq 0\}$ со значениями $h_n \in E$, $q_n \in (0, +\infty)$, заданная полумарковской матрицей вероятностей перехода

$$P\{h_{n+1} = j, q_n \leq t / h_0, \ldots, h_n = i, q_0, \ldots, q_{n-1}\} = \\ = P\{h_{n+1} = j, q_n \leq t / h_n = i\} = Q_{ij}(t) \quad (1)$$

Процесс $\{h_n, q_n, n \geq 0\}$ является специфической двухмерной цепью Маркова, в которой вероятности перехода зависят только от значений первой дискретной компоненты, $\{h_n, n \geq 0\}$, которая в свою очередь является цепью Маркова с вероятностями перехода

$$P\{h_{n+1} = j / h_n = i\} = p_{ij} = Q_{ij}(+\infty) \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует также, что

$$P\{q_n \leq t / h_n = i, h_{n+1} = j\} = G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) / p_{ij} \quad (3)$$

В частности, если цепь Маркова $\{h_n, n \geq 0\}$ находится все время в одном фиксированном состоянии, то ПМВ превращается в обычный процесс восстановления [7]. Если же число возможных состояний равно двум, то такой ПМВ называется альтернирующим [8].

Пример траектории полумарковского процесса приведен на рис. 1.

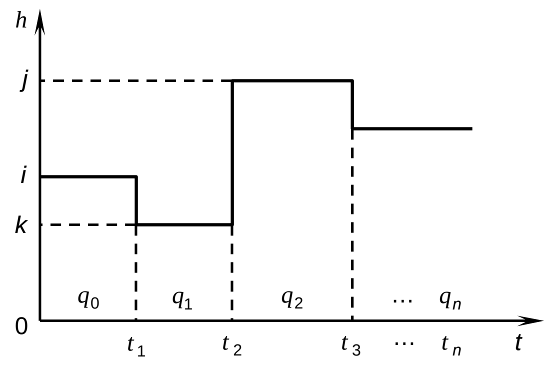

Рис.1. Траектория скачкообразного однородного полумарковского процесса.

Значение полумарковского процесса в фиксированный момент времени t называется состоянием. Моменты t_n называются моментами перехода из одного состояния в другое или моментами изменения состояния. Случайные величины $q = t_{n+1} - t_n, n \geq 0$, называются временами пребывания h_n.

Полумарковский процесс конструктивно описывается с помощью ПМВ, $\{h_n, q_n, n \geq 0\}$, т.е. полумарковской матрицей $Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in E\}$ и вектором начального распределения $P = \{p_i = P\{h(0) = i\}, i \in E\}$.

Конструктивное определение полумарковские можно также получить, если воспользоваться матрицей функции распределения $G(t) = \{G_{ij}(t), i, j \in E\}$ времени пребывания в состояниях

$$G_{ij}(t) = P\{q_n \leq t / h_n = i, h_{n+1} = j\} \tag{4}$$

и матрицей переходных вероятностей вложенной цепи $P = \{p_{ij}, i, j \in E\}$

$$p_{ij} = P\{h_{n+1} = j / h_n = i\} \tag{5}$$

При этом полумарковская матрица $Q(t) = \{Q_{ij}, i, j \in E\}$ определяется соотношением $Q_{ij}(t) = p_{ij} G_{ij}(t)$. Из вероятностного смысла полумарковской матрицы (1) следует

$$\sum_{j \in E} Q_{ij}(t) = p_i(t) = P\{q_n \leq t / h_n = 1\}, i \in E \tag{6}$$

Таким образом, $p_i(t)$ представляет собой функцию распределения времени пребывания полумарковского процесса $h(t)$ в состоянии $i \in E$. Как показано в работе [9], элементы полумарковской матрицы $Q_{ij}(t)$ и функция распределения $p_i(t)$ связаны уравнением

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t q_{ij}(x) p_i(dx), \tag{7}$$

где q_{ij} – условная вероятность перехода полумарковского процесса из состояния i в j при условии, что в i-м состоянии время пребывания равно x:

$$q_{ij}(x) = P\{h_{n+1} = j / h_n = i, q_n = x\}. \tag{8}$$

Конструктивно полумарковский процесс $h(t)$ определяется вектором $p(t) = \{p_i(t), i \in E\}$ функций распределения времен пребывания и матрицей $q(t) = \{q_{ij}(t), i, j \in E\}$ условных вероятностей перехода. Соотношение (7) однозначно определяет полумарковскую матрицу $Q(t)$. В некоторых случаях представляет практический интерес еще одна стохастическая конструкция полумарковского процесса. ПМВ с конечным числом переходов в дискретном фазовом пространстве состояний задается равенством

$$q_i = \min_{j \in E} a_{ij} = \sum_{j \in E} J_{ij} a_{ij}, \tag{9}$$

где a_{ij} – независимые в совокупности неотрицательные случайные величины с заданными функциями распределения $A_{ij}(t) = P\{a_{ij} \leq t\}$; J_{ij} - индикаторы случайных событий

$$\min_{k \in E} a_{ik} = a_{ij} \tag{10}$$

с данными условными вероятностями $h_{ij}(t) = M[J_{ij} / a_{ij} = t]$, определяющими переходы вложенной цепи Маркова $\{h_n, n \geq 0\}$.

В каждом состоянии i действует k независимых случайных факторов через случайные временные интервалы a_{ik} таким образом, что система изменяет свое состояние, как только на нее начинает воздействовать один из факторов. При этом время пребывания ПМВ в состоянии i определяется минимальным временем воздействия одного из факторов.

Соотношения (9) и (10) позволяют легко определить аналитические характеристики ПМВ. При этом следует воспользоваться соотношением для распределения минимума независимых случайных величин

$$P\left\{\min_{1\le k<N} a_k > t\right\} = \prod_{k=1}^{N} P\{a_k > t\} \tag{11}$$

Полумарковская матрица определяется в виде

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t h_{ij}(x) A_{ij}(dx). \tag{12}$$

В этом случае

$$p_{ij} = \int_0^\infty h_{ij}(x) A_{ij}(dx) = Mh_{ij}(a_{ij}) = MJ_{ij}. \tag{13}$$

Эволюция полумарковского процесса в такой стохастической конструкции определяется следующим образом. В $i-$м состоянии определяются индикаторы перехода J_{ij} в соответствии с (10). При фиксированном i только один индикатор перехода $J_{ij}=1$ с вероятностью p_{ij}. Полумарковский процесс находится в $i-$м состоянии случайное время a_{ij}, затем переходит в состояние j и т.д.

III. Заключение

Использование аппарата полумарковских процессов позволяет описывать достаточно широкий класс сетей связи следующего поколения NGN, так как не содержит ограничений на законы распределения случайных величин, а в ряде случаев позволяет получить более простое решение задачи, когда применение других методов встречают серьезные трудности, как например, при исследовании сетей связи NGN с аппаратным и временным резервированием. Также при большом числе элементов сети связи NGN для упрощения анализа можно применять метод фазового укрупнения полумарковской системы. Укрупненная система существенно проще исходной, так как совокупность фазовых состояний реальной системы соответствует одному состоянию укрупненной, а многообразие связей между классами укрупняется во взаимосвязь укрупненных состояний.

IV. Список литературы

1. Гольдштейн Б.С., Соколов Н.А., Яновский Г.Г. Сети связи. – Санкт-Петербург: БХВ–Санкт-Петербург, 2010.
2. Бакланов И.Г. NGN: Принципы построения и организации. – Москва: Эко-Трендз, 2008.
3. Росляков А.В. Сети следующего поколения NGN. – Москва: Эко-Трендз, 2008.
4. Кузнецов В.Н., Турбин А.Ф., Цатурян Г.Ж. Полумарковские модели восстановления систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1981.
5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1978.
6. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – Киев: Наукова думка, 1982.
7. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. – Москва: Советское радио, 1967.
8. Гнеденко В.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – Москва: Наука, 1965.
9. Гихман И.И., Скороход А.В Теория случайных процессов. – Москва: Наука, 1973.