Determinarea proceselor în unele sisteme cu parametri distribuiţi şi control discret impulsiv

Gheorghe CEBAN, Ion BALMUS, Radu MELNIC
Universitatea Tehnică a Moldovei
gceban@mail.utm.md

Abstract — **Este propusă o metodă de determinare a proceselor în sisteme cu dirijare automată de tip hiperbolic cu parametri distribuiţi şi control discret impulsiv (SPD) pentru care partea continuă poate fi interpretată în formă de sistem impulsiv echivalent cu parametri concentraţi ceia ce permite aplicarea metodelor teoriei sistemelor impulsive cu parametri concentraţi cu control nemişcat la determinarea proceselor în SPD de tip ondulatoriu cu control dinamic discret impulsiv şi procesul poate fi reprezentat în formă analitică finită.**

Cuvinte cheie: **sisteme cu parametri distribuiţi, acţiune de control, funcţia standardizatoare, funcţia de transfer, D-transformata.**

Considerăm o clasă de sisteme liniare, unidimensionale, staţionare cu parametri distribuiţi (SPD) de tip hiperbolic de lungimea l cu un control în mişcare impulsiv şi periodic de perioada T şi intensitatea U(t) care se deplasează uniform de-a lungul sistemului cu viteza V , acţionând ciclic sistemul în punctele date: xm=mVT, m=1,2,…,N-1, N=l/VT, cu perioada T0=NT, xm+kN= xm, k=0,1,2,….

Pentru obţinerea proceselor în sistemele considerate se aplică metoda structurală pentru sisteme cu parametrii distribuiţi [1] şi impulsive [2] în combinare cu metoda fracţiilor în lanţ [4]. Mai departe se utilizează terminologia acceptată în [1], [3], [5].

Admitem că procesele care au loc în SPD sunt descrise ca problemă de frontieră în formă standard de următorul sistem:

$$L(Q(x,t))= w(x,t),\ x\in D,\ t>0, \qquad (1)$$

$$\Gamma(Q(x,t))= 0, \quad x\in \partial D,\ t>0, \qquad (2)$$

$$N(Q(x,t))= 0, \quad x\in D,\ t=0, \qquad (3)$$

unde L, Γ ,N sunt operatori liniari cu coeficienţi constanţi (L este de tip hiperbolic), Q(x,t) - funcţia stării sistemului, w(x,t) = f(x,t) + φ(x,t) funcţia standadizatoare a problemei de frontieră, f(x,t) – funcţia control de acţiune exterioară la intrare, φ(x,t) funcţia perturbare de acţiune la intrare, care ţine cont de acţiunea asupra SPD a condiţiilor iniţiale si de frontieră

$$\varphi(x,t)= \varphi_N(x,t)+ \varphi_\Gamma(x,t)= =\{Q_0(x)\,\delta^1(t) +\{b+Q_1(x)\,\delta(t)\}+$$

$$\{\sum_{\nu=0}^{1}[\alpha_\nu g_\nu(t)\ \delta^{(\nu)}(x)+\alpha_{\nu+2}g_{\nu+2}(t)\delta^{(\nu)}(l-x)]\} \quad (4),$$

unde b, $\alpha_\nu, \alpha_{\nu+2}$ - constante date, $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $g_\nu(t), g_{\nu+2}(t)$, (ν =0, 1) funcţii corespunzătoare perturbaţiilor iniţiale şi de frontieră.

În admiterile acceptate controlul dinamic a acţiunii impulsiv-discrete obţine forma analitică:

$$f(x, t)= \sum_{m=1}^{N-1}\delta(x-mvT)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-mT-kNT)\,u(t) \qquad (5)$$

Procesele în SPD după aplicarea transformatei integrale Laplace la problema (1)-(3) sunt descrise de ecuaţia

$$\overline{Q}(x,p)= \overline{Q_f}(x,p)+\overline{Q_\varphi}(x,p) = \overline{Q_f}(x,p)+\overline{Q_{\varphi N}}(x,p)$$

$$+\overline{Q_{\varphi_\Gamma}}(x,p) = W(x,\xi,p)\otimes[\overline{f}(x,p)+\overline{\varphi_N}(x,p)+$$

$$+\overline{\varphi_\Gamma}(x,p)], \qquad (6)$$

$W(x,\xi,p)$ - funcţia de transfer a părţii continui SPD.

Din (5) $\overline{f}(x,p) = u^*(p,0)\sum_{k=0}^{N-1}e^{-mpT}\delta(x-mvT)$ (7)

unde $u^*(p,0)= \sum_{k=0}^{\infty}u[kNT,0]e^{-kNTp}$ =D{u[kNT,0)]}

transformata Laplace discretă a funcţiei u[kNT, 0)]. Deci:

$$\overline{Q_f}(x,p) = u^*(p,0)\sum_{m=1}^{N-1}e^{-mTp}\,W(x, mvT, p) \qquad (8)$$

$$\overline{Q_{\varphi_N}}(x,p) = W(x,\xi,p)\otimes[b+Q_1(x)+pQ_0(x)] \qquad (9)$$

$$\overline{Q_{\varphi_\Gamma}} = \sum_{\nu=0}^{1}(-1)^\nu[\alpha_\nu\overline{g_\nu}(p)\ \ W_\xi^{(\nu)}(x,0,p)+$$

$$+\alpha_{\nu+2}\overline{g_{\nu+2}}(p)W_\xi^{(\nu)}(x,l,p)]. \qquad (10)$$

Atunci procesul obţine forma:

$$\overline{Q}(x,p) = u^*(p,0)\,W_1(x,p) + \overline{Q_\varphi}(x,p) \qquad (11)$$

Aplicând formulei (11) transformata D-gotic obţinem ecuaţia imaginilor proceselor în SPD

$$Q^*(x,q,\varepsilon) = [u^*(q,0)W_1^*(x,q,\varepsilon)+Q_\varphi^*(x,q,\varepsilon)]/T_0 \quad (12)$$

unde $q=pT_0$ este parametrul relativ al transformatei.

Ecuaţia (12) permite de a determina acţiunea de control $u^*(q,0)$ care asigură îndeplinirea condiţiilor înaintate faţă de sistem şi determinarea proceselor corespunzătoare din sistem.

Aşa cum condiţia (1) este o ecuaţie de tip hiperbolic cu coeficienţi constanţi rezultă că perturbaţiile de la condiţiile iniţiale, de frontieră şi de control se propagă în SPD cu viteză constantă finită a. Dacă dinamica părţii continui a SPD este descrisă de ecuaţii ondulatorii fără evidenţa disipării (fără pierderi) cu coeficienţi echilibraţi, atunci perturbările se propagă fără denaturare. Pentru aşa o clasă de SPD partea continuă poate fi interpretată în formă de sistem impulsiv echivalent cu parametri concentraţi cu perioada elementului impulsiv $\tau = l/a$.

Aceasta permite de a aplica metodele teoriei sistemelor impulsive cu parametri concentraţi cu control nemişcat la determinarea proceselor în SPD de tip ondulatoriu cu control dinamic discret impulsiv şi procesul poate fi reprezentat în formă analitică finită.

În caz general, pentru părţile continui staţionare de tip hiperbolic la funcţia de transfer transcendentală $W(x,p,\varepsilon)$ se aplică aproximaţii fracţionar – raţionale conform metodei fracţiilor în lanţ [4], ceia ce permite dea construi pentru SPD considerate modele matematice în formă de sisteme impulsive corespunzătoare cu parametri concentraţi şi cu coeficienţi variabili dependenţi de ***x.***

Pentru ilustrarea metodei propuse considerăm un sistem ondulatoriu unidimensional cu parametri distribuiţi, evoluţia căreia este descrisă de ecuaţii ondulatorii fără disipare. Fie:

$$L= \frac{d^2}{dt^2} - a^2\frac{d^2}{dx^2}, \quad b=0, \quad Q_0(x)\equiv 0, \quad Q_1(x)\equiv 0,$$

$$\alpha_1 = a^2, \alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

$$\overline{g_1(p)} = \beta / p, \beta = const$$

Conform [2] $W^1_\xi(x,0,p) = -sh(p(l-x)/a)/(a^2 sh(pl/a))$,

$W_2(x,mvT,p) = -sh(pmvT/a)sh(p(l-x)/a)/(apsh(pl/a))$, pentru $0<\xi=mvT<x\le l$,

$W_3(x,mvT,p)=-sh(px/l)sh(p(l-x)/l)/(apsh(pl/a)$, pentru $0\le x<\xi = mvT<l$.

$$\overline{Q}(p,x)= \beta\, sh(p(l-x)/a)/(psh(pl/a))-u^*(p,0)[$$

$$\sum_{m=1}^{N_1} e^{-mTp} sh(pmvT/a)sh(p(l-x)/a)/(apsh(pl/a)) +$$

$$+\sum_{m=N_1+1}^{N-1} e^{-mTp} sh(px/l)sh(p(l-mvT)/a)/(apsh(pl/a)) \quad (13)$$

unde $N_1=[x/(vT)]$. Introducând mărimile relative $q=pT_0$, $\delta=x/l$, $\tau/T_0=\mu$ şi efectuând sumarea obţinem

$$\overline{Q}(q,\delta) = \beta(e^{\mu(2-\delta)q} - e^{\mu\delta q})/(2q(e^{\mu\delta q}-1)) - u^*(q,0)/(2q)$$

$$[(e^{\mu(2-q)} - e^{\mu\delta q})/(e^{2\mu q}-1) * ((1-$$

$$e^{-\mu(1+1/N)N_1 q})/(1-e^{\mu(1+1/N)q}) -$$

$$e^{-\mu(1-1/N)N_1 q})/(1-e^{\mu(1-1/N)q})) +$$

$$(e^{\mu\delta q} - e^{-\mu\delta q})/(e^{2\mu q}-1)$$

$$((e^{-\mu(1-1/N)N_1 q} - e^{-\mu(1-1/N)(N-1)q})/(1-e^{\mu(1-1/N)q}) -$$

$$(e^{-\mu(1+1/N)N_1 q} - e^{-\mu(1+1/N)(N-1)q})$$

$$e^{2\mu q}/(1-e^{\mu(1+1/N)q}))] \quad (14)$$

Aplicând în ambii membri a relaţiei (14) transformata D Laplace determinăm ecuaţia stării SPD in imagini:

$$Q^*(q,\varepsilon,\delta) = (\beta/2)e^q/(e^q-1)F_1^*(q,\varepsilon,\delta) -$$
$$u^*(q,0)e^q F_2^*(q,\varepsilon,\delta)/(2(e^q-1)) \quad (15)$$

unde $F_1^*(Q,\varepsilon,\delta)$ şi $F_2^*(Q,\varepsilon,\delta)$ sunt D-transformatele factorilor corespunzători din (14) $0\le\varepsilon\le 1$.

Imaginile $F_1^*(Q,\varepsilon,\delta)$ şi $F_2^*(Q,\varepsilon,\delta)$ primesc expresii analitice diferite pentru diferite intervale ale parametrului ε. Numărul acestor intervale depinde de corelarea dintre parametrii sistemului.

Determinăm controlul $u^*(q,0)$ astfel încât să asigure durata fixată dată finită a procesului de trecere în SPD adică ca procesul dorit :

$$Q_d^*(q,\varepsilon,\delta) = P^*(q,\varepsilon,\delta)\, e^q/(e^{Mq}(e^q-1)), \quad (16)$$

unde $P^*(q,\varepsilon,\delta)$ polinom realizabil dat, dependent de e^q de gradul nu mai mare ca *M.*
Din relaţiile (15) şi (16) obţinem expresia pentru controlul dorit

$$U_d^*(q,0) = (\beta F_1^*(q,\varepsilon,\delta) - 2P^*(q,\varepsilon,\delta)e^{-Mq})/F_2^*(q,\varepsilon,\delta). \quad (17)$$

Aplicând la (16) şi (17) D transformata inversă obţinem controlul şi procesul dorit în SPD

$U_d[n,0]$ si $Q_d[n,\varepsilon,\delta]$, n=0,1,2,....,

$0\le\varepsilon\le 1, 0\le\delta\le 1$.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977.

[2] Бутковский А.Г.Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979.

[3] Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.

[4] Хованский А.Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М. Гостехиздат, 1956.

[5] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М: Физматгиз, 1963.