ECHILIBRUL FIRULUI OMOGEN GREU SUPUS LA TENSIUNI MARI

Autori: Mihai ȚOPA, Igor ZARIŞNEAC

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Determinarea formei de echilibru a unui fir omogen flexibil şi inextensibil suspendat de capete în cîmpul de gravitaţie şi a tensiunii din fir în orice punct al firului.*

Cuvinte cheie: *fir omogen cu greutatea uniform distribuită, lănţişor, tensiune în fir.*

Fie un fir flexibil şi inextensibil AB acţionat de greutatea proprie şi foarte întins. Izolăm elementul de fir CD, unde C este punctul cel mai de jos al curbei AB situate în plan vertical, iar D – un punct arbitrar al firului cu coordonatele *x* şi *y*. Axa C*x* este orientată orizontal, iar C*y* dupa verticala ascendentă (fig.1).

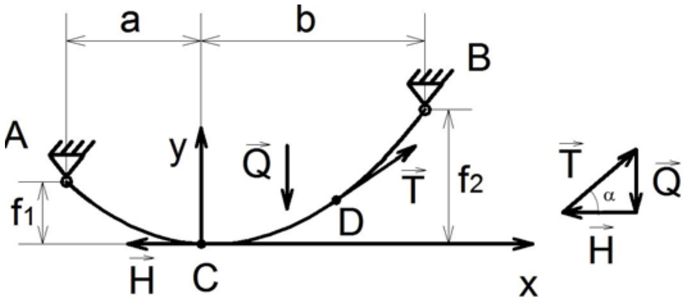

Fig. 1.

Elementul CD se află în echilibru sub acţiunea a trei forţe.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q}{H} = \frac{dy}{dx} = y', \quad ds = \sqrt{1+y'^2}, \quad \frac{dQ}{ds} = q = const, \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+y'^2}\,dx} = \frac{q}{H}, \quad \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{H} \tag{1}$$

$y = \frac{H}{q}\operatorname{ch}\left(\frac{q}{H}x + C_1\right) + C_2$. Curba trece prin punctul C, $X_c=Y_c=Y'_c=0$, rezultă C□=0, C□= $-\frac{H}{q}$.

$$y = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qx}{H} - 1\right) \tag{2}$$

Curba reprezentată de ecuaţia (2) se numeşte lănţişor. Lungimea unui arc de lănţişor $s = \frac{H}{q}\operatorname{sh}\frac{qx}{H}$. Lungimea firului suspendat în punctele A şi B

$$L = \frac{H}{q}\left[\operatorname{sh}\frac{qa}{H} + \operatorname{sh}\frac{qb}{H}\right] \tag{3}$$

Tensiunea în firul *T* se determină din formula $T\cos\alpha = H$

$$T = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = H\sqrt{1+y'^2} = H\operatorname{ch}\frac{qx}{H} = H\left(1+\frac{qy}{H}\right) = H + qy \tag{4}$$

Mărimea tensiunii din fir este direct proporţională cu ordonata punctului unde se calculează tensiunea. Distanţele *a* şi *b* pot fi determinate din ecuaţiile:

$$f_1 = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qa}{H} - 1\right), \qquad f_2 = \frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qb}{H} - 1\right), \tag{5}$$

Obţinem $a = \frac{H}{q}(\mathrm{ch}\frac{qf_1}{H} + 1)$, $b = \frac{H}{q}(\mathrm{ch}\frac{qf_2}{H} + 1)$. Tensiunea H din fir în punctul C se determină din:

$$\frac{ql}{H} = \mathrm{arch}\left(\frac{qf_1}{H} + 1\right) + \mathrm{arch}\left(\frac{qf_2}{H} + 1\right) \tag{6}$$

Tensiunea din fir în punctele de suspensie A şi B

$$T_A = H + qf_1, \quad T_B = H + qf_2, \tag{7}$$

Dacă firul este foarte întins tensiunile mari de la capete vor provoca tensiune H mare în punctul C. Dacă $qL < H$, iar $x_B - x_A < L$, rezultă $qx < qL < H$, $\frac{qx}{H} < 1$. Putem dezvolta în serie exponentele ce se conţin în funcţiile $\mathrm{sh}\frac{qx}{H}$ şi $\mathrm{csh}\frac{qx}{H}$: $e^{\pm\frac{qx}{H}} \approx 1 \pm \frac{qx}{H} + \frac{1}{2!}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 \pm \frac{1}{3!}\left(\frac{qx}{H}\right)^3 + \cdots$

Avem $y = \frac{H}{q}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \cdots\right]$. Neglijînd puterile mari ale raportului $\frac{qx}{H}$, începând cu puterea a patra obţinem o parabolă.

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \tag{8}$$

Cerem ca parabola să treacă prin punctele A şi B şi avem

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}, \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H}, \quad a + b = l, \text{ rezultă } a = \frac{l}{1+\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}}, \quad b = \frac{l\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}}{1+\sqrt{\frac{f_2}{f_1}}} \tag{9}$$

Lungimea firului

$$L = \frac{H}{q}\left[\frac{q}{H}l + \frac{1}{6}\left(\frac{q}{H}\right)^3(a^3 + b^3)\right] \tag{10}$$

Aplicaţie. Fie $h_1 = 8m$ şi $h_2 = 6m$, $l = 30m$, $q = 0{,}24\frac{N}{m}$. Să se determine lungimea firului L şi tensiunile în fir la capetele lui A şi B dacă înălţimea de la pămînt pînă la fir $h_0 = 5m$.

Rezolvînd prin încercări ecuaţia (6) în care $f_1 = h_1 - h_0 = 3m$ şi $f_2 = h_2 - h_0 = 1m$, obţinem $H=14{,}56m$. Din (5) avem $a=19{,}00m$, $b=11{,}00m$. Lungimea firului se calculează conform (3) $L=30{,}37m$. Tensiunea la capete A şi B sunt: $T_A = 15{,}28N$, $T_B = 14{,}80N$. Conform (9) $a=19{,}02m$, $b=10{,}98m$. Determinăm tensiunea H, $H = \frac{l^2q}{2(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2})^2} = 14{,}47N$. Lungimea firului conform (10) este $L=30{,}37m$, $T_A = 15{,}2N$, $T_B = 14{,}7N$.

Concluzie: Forma de echilibru a firului acţionat de forţe distribuite uniform pe lungimea firului este lănţişorul, dacă firul este foarte întins forma de echilibru poate fi aproximată cu o parabolă. Mărimea tensiunii este direct proporţională cu ordonata punctului unde se calculează tensiunea.

Bibliografie:

1. Voinea R., Voiculescu D., Simion F. *Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie*. Bucureşti 1989. p1151
2. Atanasiu M. *Mecanica tehnică. Statica*. Bucureşti 1963. p228
3. М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон. *Теоретическая механика в примерах и задачах*. Т.3.Издательство “Наука” Москва 1973. p487