ASUPRA DURATEI DE VIAȚĂ A REȚELELOR DE TIP SERIAL-PARALEL CU DURATA DE VIAȚĂ A UNITĂȚILOR EXPONENȚIAL DISTIBUITĂ ȘI NUMĂRUL ALEATORIU DE SUBREȚELE

Maria ROTARU

Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Școala Doctorală,
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Maria Rotaru, maria.rotaru@isa.utm.md

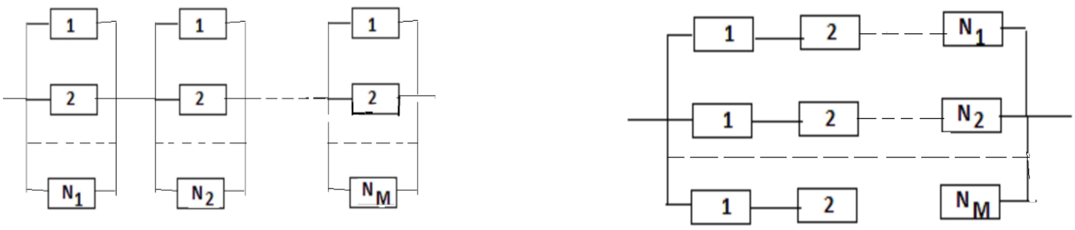
Coordonatorul științific **Alexei LEAHU**, dr., UTM

Rezumat. *În lucrare este dedusă o nouă distribuție de durată de viață a rețelelor de tip serial-paralel, distribuție abordată atât prin metode analitice cât și prin Metode Monte-Carlo. Noutatea distribuției constă în faptul că numărul de subrețele este aleator, guvernat de distribuția Poisson, iar duratele de viață sunt variabile aleatoare, independente, identic, exponențial distribuite. Am arătat că cele mai importante caracteristici ale acestei variabile aleatoare, media, dispersia și funcția de distribuție, simulate prin metode Monte Carlo aproximează aceleași caracteristici cu orice exactitate dorită, prin intermediul, respectiv, media, dispersia de selecție, dar și funcția empirică de distribuție. Mai mult, putem indica și numărul minimal de simulări suficient pentru a garanta exactitatea dorită cu probabilitatea de încredere dorită.*

Cuvinte cheie: *fiabilitate, funcție de supraviețuire, valoare medie, dispersie, simulare Monte-Carlo.*

Introducere

În această lucrare considerăm modelul matematic a rețelelor de tip serial-parale și paralel-serial (de tip A și B) descrise în lucrarea [1]. Pentru studiu vom lua varianta B, adică varianta în care unitățile rețelelor au duratele de viață exponențial distribuite fiind v.a.i.i.d. cu funcția de distribuție $F(x)$, numărul unităților N_k în fiecare subrețea fiind același și egal cu $N \geq 2$, iar numărul de subrețele fiind o variabilă aleatoare M de clase PSD, independentă de duratele de viață ale unităților.



A **- Serial-Parallel Network scheme.** ***B*** **- Parallel-Serial Network scheme.**

Figura 1 Reprezentarea schematică a rețelelor de tip serial-paralel și paralel-serial [1]

Abordări teoretice

Propoziția 1. Funcțiile de distribuție a duratei de viață pentru rețelele de tip A și B pot fi calculate, respectiv după formulele:

$$\boldsymbol{F_{s-p}(x) = \left[1 - \frac{B\left(\omega\left(1-(F(x))^N\right)\right)}{B(\omega)}\right] I_{[0,+\infty)}(x)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{F_{p-s}(x)} = \left[\frac{B\left(\omega\left(1-\left(1-F(x)\right)^{N}\right)\right)}{B(\omega)}\right] \boldsymbol{I_{[0,+\infty)}(x)} \tag{9}$$

Vom nota funcția de supraviețuire, altfel cunoscută ca fiabilitate a rețelelor cu $R(x)$, unde $R(x) = 1 - F(x)$ de asemenea, vom ține cont că notația $R_{s-p}(x)$ se referă la fiabilitatea rețelelor de tip serial-paralel, iar $R_{p-s}(x)$ este fiabilitatea rețelelor de tip paralel-serial.

Funcțiile de fiabilitate ale rețelelor respective, poate fi calculată conform formulelor:

$$\boldsymbol{R_{s-p}(x)} = \left[\frac{B\left(\omega\left(1-\left(F(x)\right)^{N}\right)\right)}{B(\omega)}\right] \boldsymbol{I_{[0,+\infty)}(x) + I_{(-\infty,0]}(x)} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{R_{p-s}(x)} = \left[1 - \frac{B\left(\omega\left(1-\left(1-F(x)\right)^{N}\right)\right)}{B(\omega)}\right] \boldsymbol{I_{[0,+\infty)}(x) + I_{(-\infty,0]}(x)} \tag{11}$$

Să considerăm $F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) I_{[0,+\infty)}(x), x > 0$. Dacă $M \sim Poisson^{*}(\omega)$, și $P(M = m) = \frac{\omega^m}{m!} e^{-\omega} / (e^{\omega} - 1)$, $B(\omega) = (e^{\omega} - 1)$ atunci, conform formulei (1) cunoscând formula funcției $B(\omega)$ și efectuând substituția, obținem că

$$\boldsymbol{F_{s-p}(x)} = \left[1 - \frac{e^{\omega\left(1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N}\right)} - 1}{e^{\omega} - 1}\right] \tag{5}$$

Prin derivarea funcției $F(x)$ din formula (5) obținem funcția densității de distribuție $f(x)$ care este data prin următoarea formula

$$\boldsymbol{f_{s-p}(x)} = \frac{N\omega\lambda\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N-1} e^{\omega\left(1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N}\right)-\lambda x}}{e^{\omega} - 1} \tag{6}$$

În mod analogic, vom calcula funcția de distribuție a duratei de viață $F(x)$ pentru rețelele de tip paralel-serial

$$\boldsymbol{F_{p-s}(x)} = \left[\frac{e^{\omega\left(1-e^{-\lambda N x}\right)} - 1}{e^{\omega} - 1}\right] \tag{7}$$

Prin derivarea primară a funcției $F(x)$ din formula (7) obținem funcția densității de distribuție $f(x)$ după cum urmează

$$\boldsymbol{f_{p-s}(x)} = \frac{N\omega\lambda e^{\omega\left(1-e^{-\lambda N x}\right)-\lambda N x}}{e^{\omega} - 1} \tag{8}$$

Un alt indicator important este hazardul funcției, cunoscut și ca rata eșecului, care se notează $h(x)$ și se calculează prin formula $h(x) = f(x) / (1 - F(x))$.

Aplicând formula dată la cazurile pe care le studiem, obținem

$$\boldsymbol{h_{s-p}(x)} = \frac{N\omega\lambda\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N-1} e^{\omega\left(1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N}\right)-\lambda x}}{e^{\omega\left(1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{N}\right)} - 1} \tag{9}$$

și

$$\boldsymbol{h_{p-s}(x)} = \frac{N\omega\lambda e^{\omega\left(1-e^{-\lambda N x}\right)-\lambda N x}}{e^{\omega}\left(1-e^{1-e^{-\lambda N x}}\right)} \tag{10}$$

S-a dovedit că Kuş a studiat o nouă distribuție [3], care, coincide cu distribuția noastră pentru rețelele de tip paralel-serial. Din acest motiv, în cele ce urmează, vom analiza din punct de vedere statistic, inclusiv prin validare Monte-Carlo, modelele de tip serial-paralel, astfel obținând o nouă distribuție a duratei de viață a rețelelor de tip serial-paralel.

Astfel, în baza formulelor (5) și (7) vom calcula valoarea medie teoretică și dispersia teoretică după cum urmează:

$$\mathbb{E}\boldsymbol{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x f(x) dx} \tag{11}$$

$$\mathbb{D}\boldsymbol{X} = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \mathbb{E}\boldsymbol{X})^2 \boldsymbol{f(x) dx} = \mathbb{E}\boldsymbol{X}^2 - (\mathbb{E}\boldsymbol{X})^2 \tag{12}$$

De fiecare dată vom calcula aceste valori folosind pachetul python. După ce vom obține rezultatele, vom simula aceste variabile aleatoare prin metode Monte-Carlo și vom verifica cât de bine acestea aproximează valorile medii teoretice și dispersia teoretică.

Validarea rezultatelor teoretice

Algoritmul Monte-Carlo:

Pas 1: Generăm un eșantion de N valori în baza distribuției exponențiale cu parametrul λ

Pas 2: Luăm valoare maximă din eșantionul generat la pasul 1

Pas 3: Generăm valoarea M pentru numărul de subrețele în baza distribuției Poisson trunchiată în zero cu parametrul ω

Pas 4: Generăm un eșantion de M valori repetând pașii 1-2 de M ori

Pas 5: Luăm valoarea minimă din eșantionul obținut la pasul 4

Pas 6: Calculăm valoarea $k = \left[\left(\frac{\sqrt{\mathbb{D}\boldsymbol{X}} \cdot x_{1-\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1$, conform Teoremei Limită Centrală pentru variabile aleatoare independente, identic distribuite [4], unde ε este valoarea numerică aproximativă a erorii dorite , $X \sim N(0,1), \alpha = 0.05$

Pas 7: Generăm un set de k valori repetând pașii 4-5 de k ori

Pas 8: Calculăm valoarea medie a setului generat la pasul 7 pentru a simula valoarea $\mathbb{E}\boldsymbol{X}$

Pas 9: Calculăm dispersia pentru setul generat la pasul 7 pentru a simula valoarea $\mathbb{D}\boldsymbol{X}$

Tabelul 1

Valorile teoretice și simulate ale mediei și dispersiei

ω	λ	N	$\mathbb{E}\boldsymbol{X}$	$\widehat{\mathbb{E}\boldsymbol{X}}$	$\mathbb{D}\boldsymbol{X}$	$\widehat{\mathbb{D}\boldsymbol{X}}$
10	1,5	2	0,235800981	0,21066	0,02505	0,01565
10	1,5	4	0,507357282	0,49146	0,04757	0,0368
10	1,5	6	0,707120183	0,71131	0,05929	0,05144
20	0,8	2	0,287435202	0,25964	0,02985	0,02216
20	0,8	6	1,075180118	1,11306	0,1035	0,10726
20	1	2	0,229948161	0,19805	0,0191	0,01282
20	1	4	0,583055794	0,63534	0,0486	0,05673
20	1	6	0,860144094	0,87598	0,06624	0,06568
20	1,5	2	0,153298774	0,1352	0,00849	0,00599
20	1,5	4	0,388703863	0,35556	0,0216	0,01625
20	1,5	6	0,573429396	0,55401	0,02944	0,02514
30	0,8	2	0,227387561	0,23249	0,01748	0,0175
30	0,8	4	0,632696873	0,62109	0,05221	0,04788
30	0,8	6	0,963318998	0,99349	0,0747	0,07837
30	1	2	0,181910049	0,15297	0,01119	0,00736
30	1	4	0,506157498	0,53364	0,03341	0,03661
30	1	6	0,770655199	0,75972	0,04781	0,04433
30	1,5	2	0,121273366	0,10974	0,00497	0,00383
30	1,5	4	0,337438332	0,32761	0,01485	0,01329
30	1,5	6	0,513770132	0,50638	0,02125	0,01968

În următoarele două exemple grafice, observăm cât de bine funcția empirică de distribuție aproximează distribuția cumulativă teoretică, iar pentru un număr mai mare de valori simulate acestea tind să coincidă [1].

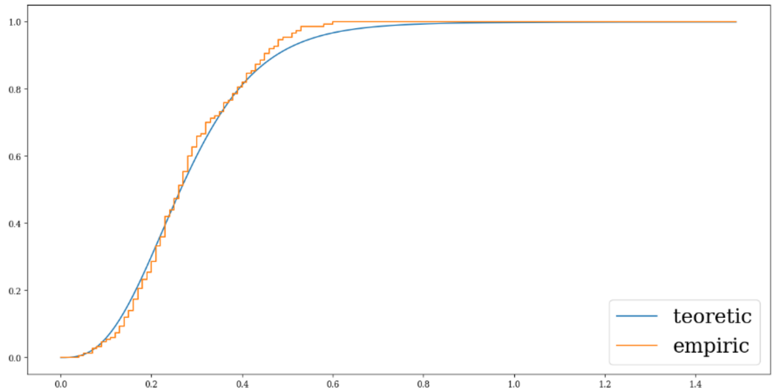


Figura 2. Funcția de distribuție pentru $\varepsilon = 0.01$

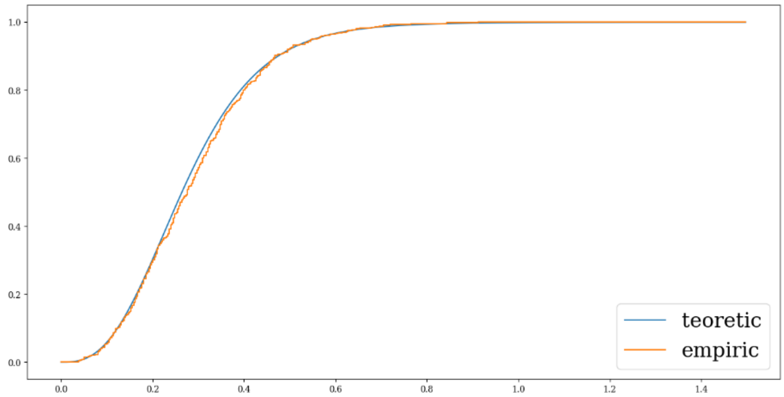


Figura 3. Funcția de distribuție pentru $\varepsilon = 0.003$

Concluzie

Ambele rezultate, reprezentate în tabel și prin metoda grafică, arată că estimatorii statistici: valoarea medie de selecție, dispersia de selecție și funcția empirică de distribuție, aproximează foarte bine aceste trei caracteristici teoretice.

Referințe

[1] A. LEAHU, V. ANDRIEVSCHI-BAGRIN, D. CIORBĂ and I. FIODOROV, "Once again about the reliability of serial-parallel networks vs parallel-serial networks.," in *IC|ECCO-2021*, Ed. 11, Chișinău, 2021.
[2] V. ANDRIEVSCHI-BAGRIN and A. LEAHU, "Reliability of serial-parallel networks vs reliability of parallel-serial networks with constant numbers of sub-networks and units.," *Journal of Engineering Sciences*, vol. 29, no. 4, pp. 17-26, 2022.
[3] C. Kuș, "A new lifetime distribution, Computational Statistics & Data Analysis," vol. 51, p. 4497–4509, 2007.
[4] A. Leahu. Tehnici de simulare statistică a sistemelor, Chișinău, 2018.