MODELE MATEMATICE PENTRU SIMULAREA NUMERICĂ A MISCĂRII LANŢURILOR CINEMATICE

V. A. Aramă (Panţuru), G. Bălan
Universitatea „Dunărea de jos” din Galaţi, Facultatea de Inginerie din Brăila

1. MODELE MATEMATICE DIRECTE ŞI INDIRECTE

Lanţul cinematic desmodrom poate implica şi legi de compoziţie externe pentru funcţiile de transmitere ale configuraţiilor în modelele matematice inverse, în cazul în care se fac unele particularizări geometrice[3].

Datorită faptului că aceste modele matematice au un caracter iterativ (temporar) înlocuiesc calculul bazat pe sisteme de ecuaţii diferenţiale prin rezolvarea de ecuaţii algebrice . Se poate face o asociere cu transformatele Laplace care , în unele cazuri , permit aceeaşi înlocuire[1].

Simularea mişcării pe calculator a mişcării unui lanţ cinematic poate fi realizat în mai multe moduri, dintre care ne vom referi la următoarele:

a) Rezolvarea analitică (când este posibil) sau numerică a unui sistem de ecuaţii diferenţiale (metodologia clasică) [4],

b) Calculul cu ajutorul unor algoritmi distincţi, numerici.

Modelele matematice nu fac distincţie intre caracterul desmodrom sau nondesmodrom al acţionării. Din cauza stabilităţii mai slabe a structurilor nondesmodrome este necesar ca precizia algoritmilor utilizaţi să fie mai ridicată şi să existe posibilitatea de validare uşoară a calculului.

Este imortant de precizat structura generală a acestor modele matematice care cuprinde următoarele categorii :

♦ Parametrii Cauchy de pozţii şi de viteze , fiecare în număr egal cu mobilitatea M cu care se calculează geometria şi câmpul de viteze la pornirea calculului .

♦ Un număr de ecuaţii , specifice modelului matematic utilizat , pe baza schimbului energetic calculul câmpului de acceleraţii la pornire calculului, sau direct câmpul de viteze la iteraţia următoare.

♦ Un număr de ecuaţii care permit amorsarea iteraţiei următoare.

"*Modelul matematic direct*" implică:

a) Condiţiile iniţiale Cauchy;

b) Un număr de "*ecuaţii de rutină*" (care sunt modelele matematice inverse) pentru fiecare categorie: poziţii, viteze, acceleraţii.

c) Un număr de relaţii care ţin seama de forţele aplicate;

d) Un număr de relaţii de trecere între iteraţii succesive.

Modelele matematice directe au în vedere mişcarea lanţului cinematic atunci când este definit câmpul forţelor aplicate în fiecare moment - direct sau prin intermediul altor mărimi de stare.

Pentru modelele matematice directe aferente descrierii unui sistem mecanic mobil se constată că sistemul de ecuaţii algebrice liniare scris pentru câmpul de acceleraţii şi pentru cinetostatică, este un sistem compatibil cu o soluţie unică.

Modele matematice energetice au marele avantaj de a nu necesita calculul explicit al câmpului de acceleraţii şi nici corelaţia cu calcul cinetostatic. Ele sunt modele matematice bazate pe teorema energiei $\Delta E = L_{i,i+1}$.

Pentru lanţurile cinematice cu mobilitatea M=1 pentru simularea pe calculator se poate aplica relaţia:

$$\omega_1^{i+1} = \frac{M^i \bullet \Delta\phi}{\omega^i \bullet J^i} + \frac{3J^i - J^{i+1}}{2J^i} \bullet \omega_1^i, \qquad (1)$$

în care primul parametru Cauchy se calculează cu relaţia:

$$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \Delta\varphi, \qquad (2)$$

alegându-se $\Delta\varphi$ ca increment pentru unghiul φ.

Reamintim semnificaţiile mărimilor care intervin în relaţia (1):

- M^i este momentul redus la manivela de reducere presupusă element conducător, a tuturor forţelor care acţionează asupra structurii cu excepţia torsorului de inerţie;
- J^i reprezintă momentul redus la aceeaşi manivelă, care nu depinde decât de geometria instantanee a sistemului, la iteraţia *i* presupusă complet definită;
- J^{i+1} reprezintă momentul redus la manivela presupusă element conducător la iteraţia *i+1*. Acesta poate fi calculat cu ω_1^{i+1} fictiv (de exemplu cu ω_1^{i+1} =0), dar cu unghiul φ_1^{i+1} dat de relaţia (2).

Parametrii Cauchy la iteraţia *i+1* sunt definiţi prin relaţiile (1) şi (2).

2. METODA ENERGETICA PENTRU MECANISME CU MOBILITATEA M=1

Metoda este un algoritm energetic ce poate fi realizat prin prelucrarea relaţiei dată de teorema energiei (3) şi care furnizează ω_1^{i+1}.

$$\Delta E = P \cdot \Delta t \tag{3}$$

unde *P* reprezintă puterile torsorului forţelor aplicate.

Se scrie variaţia de energie astfel:

$$\begin{aligned} 2\cdot \Delta E = \sum\left[m_p \vec{v}_{cp}^{\,i} \cdot \left(\vec{v}_{cp}^{\,i+1} - \vec{v}_{cp}^{\,i} \right) - \right. \\ \left. - J_{cp} \cdot \omega_p^i \cdot \left(\omega_p^{i+1} - \omega_p^i \right) \right], p = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{4}$$

sau sub forma :

$$\begin{aligned} 2\cdot \Delta E = \sum m_p \cdot \left(\left(v_{cp}^{i+1} \right)^2 - \left(v_{cp}^{i} \right)^2 \right) - \\ - \sum J_{cp} \cdot \left(\left(\omega_p^{i+1} \right)^2 - \left(\omega_p^{i} \right)^2 \right), p = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{5}$$

În situaţia în care nu se cunoaşte ω_1^{i+1} cu care se calculează vitezele la iteraţia *i+1* se apelează la teorema de proporţionalitate a câmpului de viteze la această iteraţie.

Se calculează un câmp de viteze fictiv $\vec{\mathbf{v}}^*$ cu intrările φ_1^{i+1} ,ω_1^{i} , sau chiar cu o viteză $\omega_1^{fictiv}=1$ şi se scrie relaţia:

$$\omega_p^{i+1} = k \cdot \omega_p^*, \quad \vec{v}_{cp}^{\,i+1} = k \cdot \vec{v}_{cp}^{\,*}, \; p = 1,2,3... \tag{6}$$

Aceste valori se înlocuiesc în relaţiile (4) şi (5) .

Produsul din membrul al II-lea al relaţiei (3) poate fi acceptat în următoarele două variante :

$$L_{i,i+1} = p^i \cdot \Delta t, \tag{7}$$

$$L_{i,i+1} = \frac{\left(p^i + p^{i+1} \right)}{2} \Delta t. \tag{8}$$

Principiul metodei constă în egalarea uneia dintre relaţiile (4) sau (5) în una din relaţiile (7) sau (8) şi se ţine seama de înlocuirile (6). Astfel se determină k şi implicit ω_1^{i+1} care defineşte câmpul de viteze la iteraţia *i+1*. Împreun\ cu rela]ia (2) se determin\ cei doi parametrii Cauchy la *i+1* [4].

3. CORELAŢIA DINTRE CÂMPUL DE ACCELERAŢII ŞI CÂMPUL CINETOSTATIC

Consider un mecanism cu o mobilitate M la care pentru simplificare, nu mai iau în considerare greutăţile proprii şi nici frecările. Se presupun cunoscute funcţiile care definesc :

- cuplul motor

$$Mm_j = F_j\left(\omega_j \right) \quad (\forall)\, j = \{1,2,\ldots\}.$$

- cuplul rezistent

$$Mu = f\left(\phi_k, \omega_k \right) \quad (\forall) k = \{1,2,\ldots\}.$$

Modelul matematic este iterativ şi se presupune că la amorsarea programului de calcul sunt cunoscute:

$$\left\{ \phi_1^0, \omega_1^0, \phi_4^0, \omega_4^0 \right\} \tag{10}$$

(în conformitate cu condiţiile Cauchy-Kovalevskaia), adică

$$\left\{ \phi_1^i, \omega_1^i, \phi_4^i, \omega_4^i \right\}.$$

Pentru iteraţia i ,(∀) i=0,1,...

► Se determină:

- Configuraţia

$$\begin{aligned} &[1,2,3,...n] \to \left[marimi\ de\ int rare \right]^i \to [C] \to \\ &\to \left[marimi\ de\ iesire, A, B, ..., C_j, (\forall)\, j = \overline{1,n} \right]^i \\ &(\forall) i = 0,1,...(\,iteratia\,). \end{aligned} \tag{11}$$

- câmpul de viteze:

$$\begin{aligned} &[1,2,3,...,n] \to \left[\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0.1 \right]^i \to [v] \to \\ &\to \left[\omega_1, \omega_2, ..., v_1, v_2, ..., v_{Cj}, (\forall)\, j = \overline{1,n} \right]^i \\ &(\forall) i = 0,1,... \end{aligned} \tag{12}$$

► Scriu ecuaţia (scalară) de închidere a accelera]iilor pentru toate contururile existente:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_J \left(\overrightarrow{\varepsilon_1} \times \overrightarrow{OA} - \omega_1^2 \cdot \overrightarrow{OA} + ... \right. \right. \\ &\left. \left. + \overrightarrow{\varepsilon_j} \times \overrightarrow{A_j A_{j+1}} - \omega_j^2 \cdot \overrightarrow{A_j A_{j+1}} \right) \right]^i = \vec{0}. \end{aligned} \tag{13}$$

► Se scrie apoi torsorul de inerţie pentru fiecare element în parte , astfel :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{Fi_p} = -m_p \cdot \overrightarrow{a_{Cp}} \quad ; \quad (\forall)\, p = \overline{1,n} \\ &M_{Cp} = -J_{Cp} \cdot \varepsilon_p \quad ; \quad (\forall)\, p = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{14}$$

► Scriu ecuaţiile ce determină câmpul cinetostatic:

$$\begin{aligned}&\left(1\_\sum\vec{F}=0\cap 1\_\sum M=0\right)\cap\\&\cap\left(2\_\sum\vec{F}=0\cap 2\_\sum M=0\right)\cap\ldots\\&\cap\left(n\_\sum\vec{F}=0\cap n\_\sum M=0\right).\end{aligned}\qquad(15)$$

Avem câte două ecuaţii de stare de echilibru dinamic al forţelor şi câte o ecuaţie pentru momente pentru fiecare element.

Dacă facem bilanţul constatăm :

- Numărul de ecuaţii scrise pentru calculul cinetostatic = 3 × k ;
- Numărul de ecuaţii scrise la accelera]iile pe contur=1;

⇒ Numărul de ecuaţii =3×k+1 , (∀)k=1,2,...,n.

⇒ Necunoscutele sistemului sunt:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \qquad \overrightarrow{F_{01}}, \overrightarrow{F_{12}}, \ldots$$

Numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute deci sistemul, format din ecuaţiile scrise pentru calculul cinetostatic şi pentru acceleraţiile pe contur , este un sistem compatibil şi prin rezolvarea lui se obţin condiţiile iniţiale pentru iteraţia următoare [4].

Pentru iteraţia zero 0 am cules $\varepsilon^0_{motor} = \varepsilon^0_1$ şi am obţinut prin calcul :

$$\begin{aligned}&\phi_1^1=\phi_1^0+\omega_1^0\cdot\Delta t\quad[rad.]\\&\omega_1^1=\omega_1^0+\varepsilon_1^0\cdot\Delta t.\end{aligned}\qquad(16)$$

Pentru o iteraţie i avem: φ_j^i, ω_j^i, $(\forall)j=1\vee 2\vee 3\vee\ldots\vee n$ obţinute prin calcul la iteraţia anterioară. Se parcurg acelea[i etape ca la iteraţia zero 0 .

Observaţii:

♦ Se poate obţine o precizie mai mare dacă pentru φ se ia o variaţie parabolică între iteraţia i şi iteraţia i+1.

$$\varphi_j^{i+1} = \varphi_j^i + \omega_j^i \bullet \Delta t + \varepsilon_j^i \bullet \Delta t^2/2 \qquad (17)$$

(∀) i = 0,1,...(iteraţia) $\omega_j^{i\wedge 1} = \omega_j^i + \varepsilon_j^i \bullet \Delta t$ (18)

(∀) j = 1∨2∨3∨...∨ n (= numărul elementului motor)

♦ Nu există pornire din repaos. Poziţiile iniţiale aproximative sunt date grafic.

♦ Alegerea incrementului de timp Δt este arbitrară şi corelată cu precizia urmărită şi cu modelul de interpolare.

4. CONCLUZII ŞI RECOMANDĂRI

Din punct de vedere a erorilor introduse programele de calcul pot fi testate după următoarele criterii:

- Compara]ia modelului matematic energetic cu metoda intersectării câmpului de acceleraţii cu calculul cinetostatic (A∩C). Compararea va avea ca referinţă verificarea conservării puterilor în sens D'Alembert la mai multe nivele de iteraţii, aceeaşi pentru ambele modele matematice. De aceea se vor rula următoarele programe: programul A∩C şi programul energetic [2].
- Programele pot fi realizate :
  - fie pe baza incrementului de unghi

$$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \Delta\varphi \ \ (2) \text{ şi } L_{i,i+1} = p^i\,\frac{\Delta\phi}{\omega_1^i}. \qquad (9)$$

  - fie prin intermediul incrementului de timp

$$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t \ \ (10) \text{ şi } L_{i,i+1} = p^i \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Bibliografie:

1. ***Orănescu A., Mereuţă E., Tocariu L., Munteanu V., Bega M., Necula P***. *Dynamic functions and structures , Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland, 20-24 iunie, 1999, vol.7, pag. 2649-2654.*
2. ***Mereuţă E.*** *Metode de optimizare a structurilor mecanice folosite pentru manevrarea capacelor gurilor de magazie, Simpozionul Stiinţific Internaţional, Petroşani, 2000, pag 339.*
3. ***Mereuţă E***. *Abstract Algebra Structures Regarding the mathematical models for Kinematic Chains,The Annals of "Dunărea de Jos" University, Fascicle X Applied Mechanics 1999, pag. 51-54.*
4. ***Oranescu A., Mereuţă E., Tocariu L., Munteanu V.*** *L'opportunite des ordinateurs specialises, portables pour la simulation du mouvement des structures des rigides. The Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics, SISOM, 2002, Bucharest, pp-39-46.*

Recomandat spre publicare: 05.09.2008