APLICAREA CORELAŢIEI DINTRE CÂMPUL DE ACCELERAŢII ŞI CÂMPUL CINETOSTATIC LA MIŞCAREA STRUCTURILOR MECANICE NONDESMODROME

V. A. ARAMĂ (PANŢURU)
Universitatea „ Dunărea de jos ” din Galaţi

1. INTRODUCERE

Simularea mişcării pe calculator a mişcării unui lanţ cinematic poate fi realizată în mai multe moduri:

a) Rezolvarea analitică sau numerică a unui sistem de ecuaţii diferenţiale (metodologia clasică);

b) Calculul cu ajutorul unor algoritmi distincţi, numerici.

În cadrul *modelelor matematice directe* mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea unui sistem mobil la fiecare iteraţie. Ele sunt: constantele sistemului, un număr Nc de parametri de poziţie, un număr N1=Nc de parametri de viteze şi un număr NF de forţe (şi / sau momente). La sistemele mobile desmodrome Nc=Nv=M, iar la sistemele nondesmodrome Nc=Nv<M.

În cadrul *modelelor matematice inverse* mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea lanţului cinematic la fiecare iteraţie. Ele sunt: constante sistemului, un număr M de parametri de poziţie, un număr M de parametri de viteze şi un număr M de parametri de acceleraţii, atât la sistemele desmodrome, cât şi la cele nondesmodrome, incrementul de timp.

Modelele matematice directe au `n vedere mişcarea lanţului cinematic atunci când este definit câmpul forţelor aplicate `n fiecare moment - direct sau prin intermediul altor mărimi de stare.

Modelul matematic direct implică:

- Condiţiile iniţiale Cauchy;
- Un număr de "*ecuaţii de rutină*" (care sunt modelele matematice inverse) pentru fiecare categorie: poziţii, viteze, acceleraţii.
- Un număr de relaţii care ţin seama de forţele aplicate;
- Un număr de relaţii de trecere între iteraţii succesive.

Dacă numărul de forţe de condiţionare aplicate sistemului mobil nu este suficient pentru satisfacerea bilanţului ecuaţiilor cu al necunoscutelor, este necesar să se introducă alte forţe de condiţionare (care eventual ar putea juca rolul de forţe de stabilizare a mişcării).

Pentru modelele matematice directe aferente descrierii unui sistem mecanic mobil se constată că sistemul de ecuaţii algebrice liniare scris pentru câmpul de acceleraţii şi pentru cinetostatică, este un sistem compatibil cu o soluţie unică.

2. Corelaţia dintre câmpul de acceleraţii şi câmpul cinetostatic -principiul metodei

Consider un mecanism cu o mobilitate M la care pentru simplificare, nu mai iau `n considerare greutăţile proprii şi nici frecările. Se presupun cunoscute funcţiile care definesc

- cuplul motor

$$Mm_j = F_j\left(\omega_j\right) \quad (\forall)\, j = \{1,2,\ldots\}.$$

- cuplul rezistent

$$Mu = f\left(\phi_k, \omega_k\right) \quad (\forall)\, k = \{1,2,\ldots\}.$$

Modelul matematic este iterativ ţi se presupune că la amorsarea programului de calcul sunt cunoscute: φ_1^0, ω_1^0 ,φ_4^0 , ω_4^0 (în conformitate cu condiţiile Cauchy-Kovalevskaia), adică φ_1^i, ω_1^i ,φ_4^i , ω_4^i pentru iteraţia i ,(∀) i=0,1,... .

Etapele de aplicare a modelului matematic sunt:

- Se determină:
  - configuraţia ;
  - câmpul de viteze;
- Scriu ecuaţia (scalară) de închidere a acceleraţiilor pentru toate contururile existente;
- Se scrie apoi torsorul de inerţie pentru fiecare element `n parte;
- Scriu ecuaţiile ce determină câmpul cinetostatic.

Avem câte două ecuaţii de stare de echilibru dinamic al forţelor şi câte o ecuaţie pentru momente pentru fiecare element.

Dacă se face bilanţul ecuaţiilor se obţine:

⇒ numărul de ecuaţii scrise pentru calculul cinetostatic =3×k;

⇒ numărul de ecuaţii scrise la acceleraţiile pe contur # 1;

- ⇒ numărul de ecuaţii = 3 × k ^1 , (∀) k = 1,2,...,n.
- ⇒ Necunoscutele sistemului sunt: ε_1, ε_2, ..., ε_k, $\overrightarrow{F_{01}}, \overrightarrow{F_{12}}, ...$

Numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute deci sistemul format din ecuaţiile scrise pentru calculul cinetostatic şi pentru acceleraţiile pe contur este un sistem compatibil şi prin rezolvarea lui se obţin condiţiile iniţiale pentru iteraţia următoare.

Pentru iteraţia zero 0 se culeg $\varepsilon^0_{motor} = \varepsilon^0_1$ şi se obţine prin calcul :

$$\phi_1^1 = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \quad [rad.] \qquad (1)$$
$$\omega_1^1 = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t.$$

Pentru o iteraţie i avem: φ_j^i, ω_j^i, (∀) j = 1∨2∨3∨...∨ n obţinute prin calcul la iteraţia anterioară . Se parcurg aceleaşi etape ca la iteraţia zero 0 .

Observaţii:

♦ Se poate obţine o precizie mai mare dacă pentru φ se ia o variaţie parabolică între iteraţia i şi iteraţia i+1.

$$\varphi_j^{i+1} = \varphi_j^i + \omega_j^i \bullet \Delta t + \varepsilon_j^i \bullet \Delta t^2 /2$$
(∀) i = 0,1,...(iteraţia) (2)
$$\omega_j^{i+1} = \omega_j^i + \varepsilon_j^i \bullet \Delta t \quad (\forall)\ j = 1\vee 2\vee 3\vee ...\vee n$$
(= numărul elementului motor) (3)

♦ Nu există pornire din repaos. Poziţiile iniţiale aproximative sunt date grafic.

♦ Alegerea incrementului de timp Δt este arbitrară şi corelată cu precizia urmărită şi cu modelul de interpolare.

3.1. Formularea matematică a problemei, condiţii iniţiale

Se consideră structura mobilă a unui sistem (fig.1) care funcţionează într-un interval în care funcţia de transmitere este bijectivă.

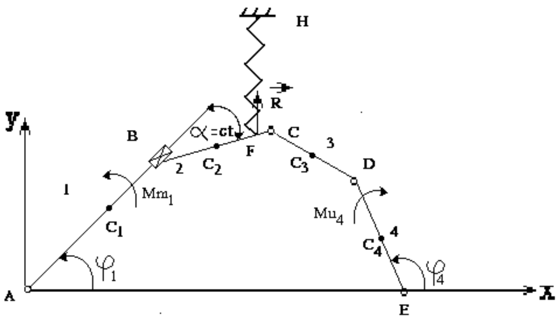

Figura1. Schema cinematică a pentagonului articulat nondesmodrom cu culisa B.

Se cunosc funcţiile corespunzătoare:

- momentului motor $Mm_1(\omega_1)$,
- momentul util Mu (ω_4),
- forţa de stabilitate

$$\begin{cases} \phi_1^1 = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ s_3^1 = s_3^0 + v_D^0 \cdot \Delta t \end{cases}.$$

Desmodromia sistemului este:

Gradul de mobilitate M = 3×4 - 2×5 = 2, deci mobilitatea este mai mare decât numărul de elemente iar numărul de elemente motoare este 1, ceea ce confirmă că structura este nondesmodromă [1].

Condiţii iniţiale Cauchy:

Sunt două elemente motoare , deci numărul de condiţii Cauchy va fi:

$$|\ \phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, ..., \phi^{(n-} \qquad (4)$$

Mobilitatea este 2 ceea ce presupune existenţa condiţiilor Cauchy până la derivatele de ordin (n-1).

Pentru cazul nostru avem n = M = 2 deci (n–1) = 2-1=1 şi vom avea: φ_1 ,φ_4 .

Numărul total de Condiţii Cauchy pentru această problemă este :

$$\{\phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_4, \dot{\phi}_4\} = \{\phi_1, \phi_1', \phi_4, \phi_4'\} = \qquad (5)$$
$$= \{\phi_1, \omega_1, \phi_4, \omega_4\}.$$

3.2. Modelul matematic şi metoda de calcul

După scrierea asamblajelor care descriu simbolic mişcarea acestui sistem prin modelul matematic al câmpului acceleraţiilor intersectat cu câmpul cinetostatic (A∩C), se realizează bilanţul ecuaţiilor şi al necunoscutelor în modelul matematic respectiv [2].

În total se pot scrie 15 ecuaţii = (4×3+1)(ecuaţii câmpul cinetostatic) ^ 2 (ecuaţii câmpul acceleraţiilor).

Necunoscutele sunt:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{F_{01}}, \overrightarrow{F_{12}}, \overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_{34}}, \overrightarrow{F_{40}} = 5\times 2 = 10 \\ M_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 15. \qquad (6)$$

Ecuaţiile se rezolvă prin metoda iteraţiilor:

$i := i+1$

Sistemul are 15 ecuaţii şi 15 necunoscute deci este compatibil. La pasul iniţial se dau valorile pentru: φ_1, ω_1, φ_4, ω_4. Prin rezolvarea sistemului se obţin ε_1^0, ε_4^0. Din ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\omega_1^1 - \omega_1^0}{\Delta t} \\ \varepsilon_4^0 &= \frac{\omega_4^1 - \omega_4^0}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^1 = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t \\ \omega_4^1 = \omega_4^0 + \varepsilon_4^0 \cdot \Delta t \end{cases}. \tag{7}$$

iar

$$\begin{cases} \phi_1^1 = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ \phi_4^1 = \phi_4^0 + \omega_4^0 \cdot \Delta t \end{cases}.$$

unde **Δt** este incrementul de timp pentru rularea programului (stabilit de programator). Se obţin astfel condiţiile Cauchy pentru pasul următor φ_1^1, ω_1^1, φ_4^1, ω_4^1

Dacă generalizăm : pentru un pas oarecare <u>**i**</u> avem condiţiile Cauchy rezultate din rezolvarea unui sistem de ecuaţii ca cel obţinut din scrierea asamblajelor care descriu intersecţia câmpului acceleraţiilor cu câmpul cinetostatic.

Prin rezolvarea sistemului am obţinut ε_1^i, ε_4^i [5] .

Din ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \frac{\omega_1^{i+1} - \omega_1^i}{\Delta t} \\ \varepsilon_4^i &= \frac{\omega_4^{i+1} - \omega_4^i}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^{i+1} = \omega_1^i + \varepsilon_1^i \cdot \Delta t \\ \omega_4^{i+1} = \omega_4^i + \varepsilon_4^i \cdot \Delta t \end{cases}.$$

iar

$$\begin{cases} \phi_1^{i+1} = \phi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t \\ \phi_4^{i+1} = \phi_4^i + \omega_4^i \cdot \Delta t \end{cases}. \tag{9}$$

Astfel au fost obţinute condiţiile Cauchy pentru pasul următor <u>**i+1**</u>: φ_1^{i+1}, ω_1^{i+1}, φ_4^{i+1}, ω_4^{i+1}. Un caz mai complex poate servi modelarea dinamică a structurii din figura 2 care este mult aplicat în tehnica modernă (motoare cu ardere internă, compresoare cu piston, acţionări hidrogazodinamice a sistemelor de lansare a rachetelor balistice din puţuri).

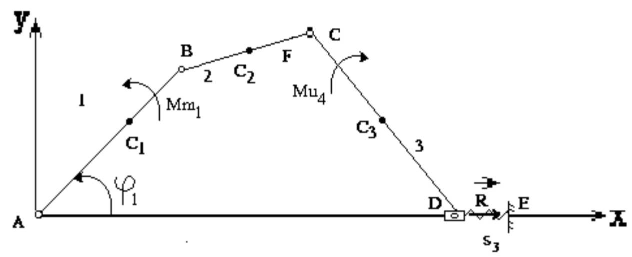

Figura 2 Schema cinematică a pentagonului articulat nondesmodrom cu culisa în D.

4.1. Formularea matematică a problemei, condiţii iniţiale

Se consideră structura mobilă din figură care funcţionează într-un interval, în care funcţia de transmitere este bijectivă .

Se cunosc funcţiile corespunzătoare :

- momentului motor $Mm_1(\omega_1)$,
- momentul util $Mu\ (\omega_4)$,
- forţa de stabilitate

$$\vec{\mathbf{R}} = (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_2} \cdot \mathbf{s_3}) \frac{\overrightarrow{\mathbf{DE}}}{\mathbf{s_3}}$$

Desmodromia sistemului este :

-gradul de mobilitate

M = 3×4 - 2×5 = 2 , deci mobilitatea este mai mare decât numărul de elemente iar numărul de elemente motoare este 1 ceea ce confirmă că structura este nondesmodromă [3] .

Condiţii iniţiale Cauchy

Sunt două elemente motoare deci numărul de Condiţii Cauchy este

$$2 \times \left[\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, \ldots\ldots, \phi^{(n-1)}\right] \tag{10}$$

Mobilitatea este 2 ceea ce presupune existenţa condiţiilor Cauchy până la derivatele de ordin (n-1). Pentru cazul nostru avem n =M =2 deci (n – 1)=2-1 =1 [i vom avea : ε_1^i, ε_4^i . Numărul total de condiţii Cauchy pentru această problemă sunt :

$$\left\{\phi_1, \dot{\phi}_1, s_3, \dot{s}_3\right\} = \left\{\phi_1, \phi_1', s_3, s_3'\right\} = \\ = \left\{\phi_1, \omega_1, s_3, v_D\right\} \tag{11}$$

4.2. Modelul matematic [i metoda de calcul

După scrierea asamblajelor care descriu simbolic mişcarea acestui sistem prin modelul matematic câmpul acceleraţiilor intersectat cu câmpul cinetostatic (A∩C) se realizează bilanţul ecuaţiilor [i al necunoscutelor în modelul matematic respectiv. În total s-au scris 12 ecuaţii = 10 (9+1) (ecuaţii câmpul cinetostatic) + 2 (ecuaţii câmpul acceleraţiilor) [2].

Necunoscutele sunt :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{F_{01}}, \overrightarrow{F_{12}}, \overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_{03}} = 4 \times 2 = 8 \\ &\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ddot{s}_3 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12$$

Ecuaţiile se rezolvă prin metoda iteraţiilor: *i :=i+1*. Sistemul are 12 ecuaţii şi 12 necunoscute deci este compatibil. La pasul iniţial (iteraţia zero) se dau valorile pentru : φ_1, ω_1, s_3, v_D.

Prin rezolvarea sistemului s-au obţinut: ε_1^0, ε_4^0. Din ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\omega_1^1 - \omega_1^0}{\Delta t} \\ \ddot{s}_3^0 &= \frac{v_D^1 - v_D^0}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^1 = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t \\ v_D^1 = v_D^0 + \ddot{s}_3^0 \cdot \Delta t \end{cases} \qquad (12)$$

iar

$$\begin{cases} \phi_1^1 = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ s_3^1 = s_3^0 + v_D^0 \cdot \Delta t \end{cases} \qquad (13)$$

unde **Δt** este incrementul de timp pentru rularea programului (stabilit de programator).

Am obţinut astfel condiţiile Cauchy pentru pasul următor : φ_1^1, ω_1^1, s_3^1, v_D^1

Dacă se generalizează pentru un pas oarecare **i** avem condiţiile Cauchy rezultate din rezolvarea unui sistem de ecuaţii ca cel obţinut din scrierea asamblajelor care descriu intersecţia câmpului acceleraţiilor cu câmpul cinetostatic.

Prin rezolvarea sistemului s-au obţinut: ε_1^0 , $s_3^{''\,0}$. Din ecuaţiile :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \frac{\omega_1^{i+1} - \omega_1^i}{\Delta t} \\ \ddot{s}_3^i &= \frac{v_D^{i+1} - v_D^i}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^{i+1} = \omega_1^i + \varepsilon_1^i \cdot \Delta t \\ v_D^{i+1} = v_D^i + \ddot{s}_3^i \cdot \Delta t \end{cases} \qquad (14)$$

iar

$$\begin{cases} \phi_1^{i+1} = \phi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t \\ s_3^{i+1} = s_3^i + v_D^i \cdot \Delta t \end{cases} \qquad (15)$$

Astfel s-au obţinut condiţiile Cauchy pentru pasul următor **i+1**:

$$\varphi_1^{i+1},\ \omega_1^{i+1},\ s_3^{i+1},\ v_D^{i+1} \qquad (16)$$

După scrierea asamblajelor, care descriu simbolic mişcarea acestui sistem prin modelul matematic câmpul acceleraţiilor intersectat cu câmpul cinetostatic (A∩C) se realizează bilanţul ecuaţiilor şi al necunoscutelor în modelul matematic respectiv. În total s-au scris 12 ecuaţii =10 (9+1) (ecuaţii câmpul cinetostatic) + 2 (ecuaţii câmpul acceleraţiilor) [3].

Considerând cele prezentate mai sus se poate confirma :

- s-a formulat mai tematic problema pentru două structuri mobile nondesmodrome, una cu culisa separată de arcul stabilizator de mişcare, iar alta - cu culisa neseparată de arcul stabilizator de mişcare;
- s-au stabilit condiţiile iniţiale pentru ambele structuri analizate;
- s-a elaborat metoda de calcul a structurilor nondesmodrome prin metoda iteraţiilor.

Bibliografie

1. ***Mereuta E., Răzmeriţă Gh.*** *Initial conditions influence upon the dynamic response of "undetermined" structures. The Third International Congress Mechanical Engineering Technologies Met' 01, Sofia, Bulgaria.*
2. ***Orănescu A , Stroe G.*** *The general axiomatic system in relation wilh the mathematical models of iterative calculation in the field of mobile systems*. The Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics - *SISOM 2001, Bucureşti, pp. 281-284.*
3. ***Mereută E.*** *Mechanical System Stability Related to the Axiomatic System Proposed. The Annals of "Dunărea de Jos" University, Fascicle X Applied Mechanics 1999, pag. 47-50.*

Recomandat spre publicare: 12.11.2008